Geometria 3

Esercizi – Prima e seconda forma fondamentale

Il primo esercizio è completamente svolto, con tutti i passaggi e i calcoli necessari. Usare questo esercizo come base per gli altri.

Introduciamo un po' di notazioni che saranno usate e ricordiamo le formule fondamentali. Indicheremo con $\mathbf{x} : D \to \mathbb{R}^3$ una parametrizzazione regolare di una (porzione di) superficie $S \subseteq \mathbb{R}^3$.

Il campo normale è dato da

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\|} = \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{\sqrt{EG - F^2}}$$

Il campo normale può essere pensato come una mappa $\mathbf{N} : S \to S^2$. In questo caso viene detto *mappa di Gauss*. A volte si usa il nome di *operatore forma* o *operatore di Weingarten* per il differenziale della mappa di Gauss, cambiato di segno:

$$S_p = -d\mathbf{N}_p : T_pS \to T_{\mathbf{N}(p)}S^2$$

I vettori $\mathbf{x}_u$, $\mathbf{x}_v$ calcolati in un punto $p \in S$ formano una base del piano tangente T_pS. Rispetto a questa base, si hanno le seguenti formule per le matrici della prima forma I_p, della seconda forma II_p e del differenziale della mappa di Gauss $-d\mathbf{N}_p$:

$$\mathrm{I}_p = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}, \text{ dove } E = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u,\ F = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v,\ G = \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v$$

$$\mathrm{II}_p = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}, \text{ dove } e = \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{uu},\ f = \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{uv},\ g = \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{vv}$$

$$-d\mathbf{N}_p = (\mathrm{I}_p)^{-1} \cdot \mathrm{II}_p$$

Le curvature principali k_1 e k_2 sono gli autovalori di $-d\mathbf{N}_p$ e sia ha

$$K = k_1 k_2 = \det(-d\mathbf{N}_p) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$$
$$H = \frac{k_1 + k_2}{2} = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(-d\mathbf{N}_p) = \frac{1}{2}\frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}$$

Poiché k_1 e k_2 sono gli autovalori di $-d\mathbf{N}_p$ soddisfano l'equazione

$$k^2 - 2Hk + K = 0$$

e quindi

$$k_{1,2} = H \pm \sqrt{H^2 - K}$$

Esercizio 1. Sia S la superficie parametrizzata dalla funzione

$$\mathbf{x}(u,v) = (uv, u^2, u+v), \qquad (u,v) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$$

1. Determinare il dominio D (dominio = aperto connesso) in modo che $\mathbf{x}$ sia una parametrizzazione regolare.
2. Calcolare le curvature principali di S nel punto $p = \mathbf{x}(0,1)$
3. Calcolare la curvatura normale di S nel punto $p = \mathbf{x}(0,1)$ nella direzione del vettore tangente alla curva $\alpha(t) = \mathbf{x}(\sin t, t+1)$

Soluzione.

1. Poiché la superficie è data da una sola parametrizzazione, basta determinare il più grande dominio (= aperto connesso) su cui la funzione $\mathbf{x}$ è iniettiva e con differenziale iniettivo.

   Sia $\mathbf{x}(u,v) = (x_0, y_0, z_0)$ e cioè

   $$uv = x_0, \qquad u^2 = y_0, \qquad u+v = z_0$$

   La seconda equazione dà $u = \pm\sqrt{y_0}$ (osserviamo che y_0 deve essere non negativo) e quindi ci sono solo due possibilità:

   $$u = \sqrt{y_0}, \quad v = z_0 - \sqrt{y_0} \quad \text{oppure} \quad u = -\sqrt{y_0}, \quad v = z_0 + \sqrt{y_0}$$

   Nel primo caso si ha

   $$x_0 = uv = \sqrt{y_0} \cdot (z_0 - \sqrt{y_0}) = z_0\sqrt{y_0} - y_0$$

   e nel secondo

   $$x_0 = uv = -\sqrt{y_0} \cdot (z_0 + \sqrt{y_0}) = -z_0\sqrt{y_0} - y_0$$

   e quindi deve essere $z_0\sqrt{y_0} = -z_0\sqrt{y_0}$ e cioè

   $$z_0\sqrt{y_0} = 0$$

   Nel caso $y_0 = 0$ si ha $u = 0$ e $v = z_0$ e dunque una sola controimmagine.

   Nel caso $z_0 = 0$ si ha $u = -v$ e si vede che i punti di coordinate $(u, -u)$ e $(-u, u)$ hanno la stessa immagine. Dunque la funzione $\mathbf{x}$ non è iniettiva sulla retta $u + v = 0$ e quindi D può essere uno dei due semipiani dati dal complementare di questa retta.

   Calcoliamo ora le derivate parziali:

   $$\mathbf{x}_u = (v, 2u, 1), \qquad \mathbf{x}_v = (u, 0, 1)$$

   e il prodotto esterno è

   $$\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v = (2u, u-v, -2u^2)$$

che è nullo solo per $(u, v) = (0, 0)$. Dunque possiamo prendere come dominio

$$D_1 = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u + v \neq 0 \text{ e } v > 0\}$$

oppure

$$D_2 = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u + v \neq 0 \text{ e } v < 0\}$$

Nel seguito scegliamo $D = D_1$, visto che dovremo considerare il punto $P = \mathbf{x}(0, 1)$.

2. Calcoliamo ora la prima e la seconda forma fondamentale e il differenziale della mappa di Gauss $d\mathbf{N}_p$. Le curvature principali sono gli autovalori di $-d\mathbf{N}_p$.

   La prima forma è data da:

   - $E = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u = 1 + v^2 + 4u^2$
   - $F = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v = 1 + uv$
   - $G = \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v = 1 + u^2$

   Le derivate seconde sono

   - $\mathbf{x}_{uu} = (0, 2, 0)$
   - $\mathbf{x}_{uv} = (1, 0, 0)$
   - $\mathbf{x}_{vv} = (0, 0, 0)$

   Il vettore normale è:

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\|} = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}(2u, u - v, -2u^2)$$

   e quindi la seconda forma è data da

   - $e = \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{uu} = \dfrac{2(u - v)}{\sqrt{EG - F^2}}$
   - $f = \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{uv} = \dfrac{2u}{\sqrt{EG - F^2}}$
   - $g = \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{vv} = 0$

   Poiché è richiesto il calcolo delle curvature principali solo per il punto $p = \mathbf{x}(0, 1)$ sostituiamo $u = 0$ e $v = 1$, ottenendo

$$E = 2, \quad F = 1, \quad G = 1, \quad \sqrt{EG - F^2} = 1$$

$$e = -2, \quad f = 0, \quad g = 0$$

   e quindi

$$S_p = -d\mathbf{N}_p = (\mathrm{I}_p)^{-1} \cdot \mathrm{II}_p = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

   Poiché la matrice è triangolare (inferiore) gli autovalori sono già sulla diagonale e quindi le curvature principali sono -2 e 0.

3. La curva passa per il punto p per $t = 0$. Si ha

$$\alpha'(0) = \cos 0 \cdot \mathbf{x}_u + \mathbf{x}_v = \mathbf{x}_u + \mathbf{x}_v$$

Dunque il vettore tangente ha coordinate $(1, 1)$ rispetto alla base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ e ha norma $\sqrt{5}$.

La norma si può calcolare in due modi: considerati come vettori di $\mathbb{R}^3$ si ha $\mathbf{x}_u = (1, 0, 1)$ e $\mathbf{x}_v = (0, 0, 1)$ e quindi rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ si ha $\alpha'(0) = (1, 0, 2)$ e la norma si ottiene calcolando il prodotto scalare standard, oppure usando la prima forma nel punto p si possono usare le coordinate $\alpha'(0) = (1, 1)$ rispetto alla base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ e la norma si ottiene calcolando il prodotto scalare dato dalla prima forma fondamentale:

$$\|\alpha'(0)\|^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 5$$

Ponendo $\mathbf{u} = \dfrac{\alpha'(0)}{\|\alpha'(0)\|}$ (ricordiamo che per calcolare la curvatura normale mediante la seconda forma si deve usare il *versore* tangente) si ha

$$k_n(\mathbf{u}) = \mathrm{II}_p(\mathbf{u}) = \frac{1}{5} \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = -\frac{2}{5}$$

oppure

$$\begin{aligned} k_n(\mathbf{u}) = -d\mathbf{N}_p(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} &= \frac{1}{5} \left[\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]^t \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \left[\begin{pmatrix} -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = -\frac{2}{5} \end{aligned}$$

dove il prodotto scalare si deve calcolare usando la prima forma.

Esercizio 2. Sia S la superficie parametrizzata dalla funzione

$$\mathbf{x}(u,v) = (u-v, u^2, v^2), \qquad (u,v) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$$

1. Determinare il dominio D in modo che $\mathbf{x}$ sia una parametrizzazione regolare.
2. Calcolare le curvature principali di S nel punto $p = \mathbf{x}(0,1)$
3. Calcolare la curvatura normale di S nel punto $p = \mathbf{x}(0,1)$ nella direzione del vettore tangente alla curva $\alpha(t) = \mathbf{x}(t, 2-e^t)$

Esercizio 3. Sia S la superficie parametrizzata dalla funzione

$$\mathbf{x}(u,v) = (u, u^2, v^3), \qquad (u,v) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$$

1. Determinare il dominio D in modo che $\mathbf{x}$ sia una parametrizzazione regolare.
2. Calcolare le curvature principali di S nel punto $p = \mathbf{x}(0,1)$
3. Calcolare la curvatura normale di S nel punto $p = \mathbf{x}(0,1)$ nella direzione del vettore tangente alla curva $\alpha(t) = \mathbf{x}(2t, 1-t)$

Esercizio 4. Sia S la superficie ottenuta come grafico della funzione differenziabile $z = f(x,y)$

1. Dimostrare che

   $$\mathbf{x}(u,v) = (u, v, f(u,v)) \qquad (u,v) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$$

   dove D è il dominio di f, è una parametrizzazione regolare di S;
2. Se $p = (x_0, y_0)$ è un punto critico di f, dimostrare che la seconda forma fondamentale di S in $\mathbf{x}(p)$ è uguale all'Hessiano della funzione f in p.
3. Ponendo

   $$f(x,y) = x^2 - y^2,$$

   calcolare la curvatura normale di S nel punto $Q = \mathbf{x}(0,0)$ nella direzione del vettore tangente alla curva $\alpha(t) = \mathbf{x}(t, 1-e^t)$.

Esercizio 5. Si considerino le superfici

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad 0 < z < 1\}$$
$$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1, \quad 0 < z < 1\}$$

1. Determinare una parametrizzazione per le due superfici S e C.
2. Provare che l'applicazione $f : S \to C$ data da $f(x,y,z) = (\frac{x}{\sqrt{1-z^2}}, \frac{y}{\sqrt{1-z^2}}, z)$ è un diffeomorfismo (in particolare, scrivere un'espressione esplicita per la funzione inversa)
3. Esiste un'isometria locale tra S e C?