Geometria 3 – Esercizi sulle superfici

Esercizio 1. Per ognuna delle seguenti superfici determinare un dominio su cui la parametrizzazione è regolare e calcolare la prima e la seconda forma fondamentale, la curvatura Gaussiana, la curvatura media e le curvature principali.

1. $\mathbf{x}(u, v) = (a \sin u \cos v,\ b \sin u \sin v,\ c \cos u)$ ellissoide di semiassi a, b, c
2. $\mathbf{x}(u, v) = (au \cos v,\ bu \sin v,\ u^2)$ paraboloide ellittico
3. $\mathbf{x}(u, v) = (au \cosh v,\ bu \sinh v,\ u^2)$ paraboloide iperbolico
4. $\mathbf{x}(u, v) = (a \sinh u \cos v,\ b \sinh u \sin v,\ c \cosh u)$ iperboloide a due falde

Esercizio 2. Sia S la superficie parametrizzata dalla funzione

$$\mathbf{x}(u, v) = (v \cos u,\ v \sin u,\ au), \qquad (u, v) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$$

S è detto *elicoide* e si ottiene considerando l'elica $(\cos u, \sin u, u)$ e tracciando, per ogni punto dell'elica, la retta parallela al piano xy e che interseca l'asse z, cioè la retta che unisce il punto $(\cos u, \sin u, u)$ dell'elica al punto $(0, 0, u)$.

1. Determinare il dominio D in modo che $\mathbf{x}$ sia una parametrizzazione regolare.
2. Calcolare la prima e la seconda forma fondamentale di S
3. Calcolare la curvatura Gaussiana, la curvatura media e le curvature principali

Esercizio 3. Superfici di rotazione. Sia $(x(v), z(v))$ l'equazione parametrica di una curva regolare nel piano xz. Ruotando questa curva intorno all'asse z si ottiene una superficie parametrizzata da

$$\mathbf{x}(u, v) = (x(v) \cos u,\ x(v) \sin u,\ z(v))$$

1. Dimostrare che la parametrizzazione è regolare in tutti i punti in cui la curva non incontra l'asse z
2. Calcolare la prima forma fondamentale di S
3. Ponendo $x(v) = \cosh v$, $z(v) = v$ si ottiene la cosiddetta *catenoide*. Il grafico del coseno iperbolico è una curva detta *catenaria*, perché è la curva su cui si dispone una catena di densità omogenea fissata in due punti (non su una retta verticale) sotto l'azione della forza di gravità.

   Determinare la prima e la seconda forma fondamentale, la curvatura Gaussiana, la curvatura media e le curvature principali della catenoide.

Esercizio 4. Consideriamo, nel piano xz la curva C data da

$$x(v) = R \sin v, \qquad z(v) = R \left[\log \tan \left(\frac{v}{2} \right) + \cos v \right]$$

e sia S la superficie ottenuta ruotando la curva C intorno all'asse z. Calcolare la curvatura Gaussiana di S e mostrare che vale costantemente

$$K = -\frac{1}{R^2}$$

Per questo motivo S è detta *pseudosfera* (curvatura costante *negativa*) ed è stata usata da Beltrami nel 1868 per dare il primo modello di geometria non euclidea.

Abbiamo già incontrato la curva C, detta *trattrice*, negli esercizi del Capitolo 1 delle dispense (Esercizio 1.6.3). Per maggiori informazioni sulla trattrice, vedere per esempio https://it.wikipedia.org/wiki/Trattrice_(geometria) oppure https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Curves/Tractrix/