Geometria 3 – a.a. 2018-19

Esercizi – Curve nello spazio

Esercizio 1. do Carmo, Esercizio 1-3.1

Soluzione. La curva $\alpha(t) = (3t, 3t^2, 2t^3)$ ha vettore tangente $\alpha'(t) = (3, 6t, 6t^2)$. La retta $y = x - z = 0$ ha equazioni parametriche $x = t, y = 0, z = t$ e quindi è parallela al vettore $\mathbf{v} = (1, 0, 1)$. Il prodotto scalare vale quindi

$$\alpha'(t) \cdot \mathbf{v} = 3 + 6t^2$$

e si ha, ponendo $\theta(t)$ = angolo fra $\alpha'(t)$ e $\mathbf{v}$

$$\cos\theta(t) = \frac{\alpha'(t) \cdot \mathbf{v}}{\|\alpha'(t)\|\|\mathbf{v}\|} = \frac{3 + 6t^2}{\sqrt{9 + 36t^2 + 36t^4}\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

e quindi l'angolo $\theta(t)$ è costante e in effetti $\theta(t) = \pi/4$.

Esercizio 2. do Carmo, Esercizio 1-3.2

Soluzione.
a. Come si vede dalla figura, il punto sulla curva cercata sta sulla circonferenza di centro $(t, 1)$. Infatti, t è la lunghezza dell'arco di circonferenza sotteso dall'angolo al centro t (in radianti) e poiché la circonferenza rotola senza scivolamento, t è anche la lunghezza orizzontale percorsa durante il rotolamento.

Parametrizziamo questa circonferenza. Rispetto alla parametrizzazione usuale, ci sono due differenze:

1. andiamo in verso *orario* e quindi il parametro sarà $-s$
2. il punto di partenza è il *minimo* e cioè l'angolo iniziale è $\pi/2$

La parametrizzazione è dunque (usiamo il parametro s per misurare l'angolo al centro e poiché la circonferenza ha raggio 1, il parametro è l'arcolunghezza):

$$\begin{cases} x = t + \cos(-s + \pi/2) & = t + \sin(-s) & = t - \sin(s) \\ y = 1 + \sin(-s + \pi/2) & = 1 - \cos(-s) & = 1 - \cos(s) \end{cases}$$

La cicloide è formata dai punti per cui $s = t$ e si ottiene:

$$\alpha(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$$

b. La lunghezza si ottiene integrando la norma del vettore velocità. Si ha

$$\begin{aligned} \dot\alpha(t) &= (1 - \cos t, \sin t) \\ \|\dot\alpha(t)\|^2 &= 1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t = 2(1 - \cos t) \\ \|\dot\alpha(t)\| &= \sqrt{2}\sqrt{1 - \cos t} \end{aligned}$$

Si ha

$$L = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos t}\, dt$$

Ricordiamo le formule dell'angolo metà

$$\left|\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right| = \sqrt{\frac{1-\cos t}{2}}$$

e poiché nell'integrazione t varia fra 0 e 2π, il seno di $t/2$ è sempre positivo e non abbiamo bisogno del valore assoluto. Si ottiene:

$$L = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{1-\cos t}\, dt = 2\int_0^{2\pi} \sin(t/2)\, dt = 8$$

Esercizio 3. do Carmo, Esercizio 1-3.4

Soluzione.
a. L'equazione parametrica della trattrice è:

$$\alpha(t) = \left(\sin t, \cos t + \log\tan\frac{t}{2}\right)$$

dove notiamo che $t \in (0, \pi)$. La derivata è

$$\begin{aligned}
\alpha'(t) &= \left(\cos t, -\sin t + \frac{\frac{1}{2}\frac{1}{\cos^2(t/2)}}{\tan(t/2)}\right) \\
&= \left(\cos t, -\sin t + \frac{1}{2}\frac{1}{\cos^2(t/2)\tan(t/2)}\right) \\
&= \left(\cos t, -\sin t + \frac{1}{2\cos(t/2)\sin(t/2)}\right) \\
&= \left(\cos t, -\sin t + \frac{1}{\sin t}\right) \\
&= \left(\cos t, \frac{1-\sin^2 t}{\sin t}\right) \\
&= \left(\cos t, \frac{\cos^2 t}{\sin t}\right) \\
&= \cos t\left(1, \frac{\cos t}{\sin t}\right) = \cos t(1, \cot t)
\end{aligned}$$

Nota Bene: cot = cotangente. Da questo è chiaro che l'unico punto in cui il vettore tangente si annulla è $t = \pi/2$.

b. Sia $P(t) = \left(\sin t, \cos t + \log\tan\frac{t}{2}\right)$ un punto generico sulla trattrice. La retta tangente alla trattrice in P ha equazione (parametrica)

$$\mathbf{r}(u) = \alpha(t) + u\alpha'(t)$$

La coordinata x ha dunque equazione

$$x(u) = \sin t + u\cos t$$

e perciò l'intersezione con l'asse y si trova ponendo $x(u) = 0$ e cioè $u = -\tan t$. Dunque il punto $Q(t)$, intersezione fra la trattrice e l'asse y ha coordinate

$$\begin{aligned} Q(t) &= \left(0, \cos t + \log\tan\frac{t}{2} - \tan t\cos t\cot t\right) \\ &= \left(0, \log\tan\frac{t}{2}\right) \end{aligned}$$

e la distanza fra $P(t)$ e $Q(t)$ vale

$$d(P(t), Q(t))^2 = (\sin t - 0)^2 + \left(\cos t + \log\tan\frac{t}{2} - \log\tan\frac{t}{2}\right)^2 = \sin^2 t + \cos^2 t = 1$$

vale costantemente 1.

Esercizio 4. do Carmo, Esercizio 1-5.1

Soluzione. Questo esercizio è già stato svolto in classe. Riportiamo qui i calcoli completi, per futura referenza.

La parametrizzazione standard dell'elica di raggio a e passo $2\pi b$ è:

$$\alpha(s) = \left(a\cos\frac{s}{c}, a\sin\frac{s}{c}, b\frac{s}{c}\right)$$

dove $c^2 = a^2 + b^2$

a. Il parametro s è l'arcolunghezza: basta calcolare la norma del vettore derivata:

$$\alpha'(s) = \left(-\frac{a}{c}\sin\frac{s}{c}, \frac{a}{c}\cos\frac{s}{c}, \frac{b}{c}\right) = \frac{1}{c}\left(-a\sin\frac{s}{c}, a\cos\frac{s}{c}, b\right)$$

e quindi

$$\|\alpha'(s)\|^2 = \frac{1}{c^2}\left(a^2\sin^2\frac{s}{c} + a^2\cos^2\frac{s}{c} + b^2\right) = \frac{a^2+b^2}{c^2} = 1$$

b. Calcoliamo le derivate

$$\begin{aligned} \alpha'' &= \left(-\frac{a}{c^2}\cos\frac{s}{c}, -\frac{a}{c^2}\sin\frac{s}{c}, 0\right) = \frac{a}{c^2}\left(-\cos\frac{s}{c}, -\sin\frac{s}{c}, 0\right) \\ \alpha''' &= \left(\frac{a}{c^3}\sin\frac{s}{c}, -\frac{a}{c^3}\cos\frac{s}{c}, 0\right) = \frac{a}{c^3}\left(\sin\frac{s}{c}, -\cos\frac{s}{c}, 0\right) \\ \alpha' \wedge \alpha'' &= \left(\frac{ab}{c^3}\sin\frac{s}{c}, -\frac{ab}{c^3}\cos\frac{s}{c}, \frac{a^2}{c^3}\right) = \frac{a}{c^3}\left(b\sin\frac{s}{c}, -b\cos\frac{s}{c}, a\right) \\ (\alpha' \wedge \alpha'') \cdot \alpha''' &= \frac{a^2 b}{c^6} \end{aligned}$$

La curvatura si ottiene dalla prima formula di Frenet

$$k(s) = \|\alpha''(s)\| = \frac{a}{c^2}\sqrt{\cos^2\frac{s}{c} + \sin^2\frac{s}{c}} = \boxed{\frac{a}{a^2+b^2}}$$

Per la torsione, calcoliamo con le formule per parametro qualunque, ricordando che $c^2 = a^2 + b^2$:

$$\tau(s) = \frac{(\alpha' \wedge \alpha'') \cdot \alpha'''}{\|\alpha''\|^2} = \frac{a^2 b}{c^6} \cdot \frac{(a^2+b^2)^2}{a^2} = \boxed{\frac{b}{a^2+b^2}}$$

c. Il piano osculatore è quello generato da $\mathbf{t}$ ed $\mathbf{n}$ o, equivalentemente, il piano perpendicolare a $\mathbf{b}$. Il vettore binormale è parallelo a $\alpha' \wedge \alpha''$ e quindi, per scrivere l'equazione del piano osculatore, possiamo usare direttamente $\alpha' \wedge \alpha''$.Perciò il piano osculatore nel punto $\alpha(s)$ ha equazione:

$$b \sin \frac{s}{c} \left(x - a \cos \frac{s}{c} \right) - b \cos \frac{s}{c} \left(y - a \sin \frac{s}{c} \right) + a \left(z - b \frac{s}{c} \right) = 0$$

d. Poiché la parametrizzazione è per arcolunghezza,

$$\mathbf{t}' = \alpha'' = k\,\mathbf{n}$$

e quindi il vettore normale ha la direzione di α''. Allora le rette richieste hanno equazione parametrica $r(u) = \alpha(s) + u\alpha''(s)$ e cioè

$$\begin{cases} x = a \cos \dfrac{s}{c} - u \cos \dfrac{s}{c} \\ y = a \sin \dfrac{s}{c} - u \sin \dfrac{s}{c} \\ z = b \dfrac{s}{c} \end{cases}$$

dunque incontrano tutte l'asse z, per il valore $u = a$ del parametro. Inoltre, poiché la componente z è costante, sono tutte rette parallele al piano xy e cioè sono perpendicolari all'asse z.

e. Basta ricordare che il vettore tangente è

$$\mathbf{t} = \frac{1}{c} \left(-a \sin \frac{s}{c}, a \cos \frac{s}{c}, b \right)$$

e quindi il prodotto scalare con il versore $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$ è costante e dunque l'angolo formato da $\mathbf{t}(s)$ e $\mathbf{k}$ è costante.

$$\cos \widehat{\mathbf{t}(s)\mathbf{k}} = \frac{\mathbf{t}(s) \cdot \mathbf{k}}{\|\mathbf{t}(s)\| \|\mathbf{k}\|} = \frac{b}{c} = \tau(s)$$

Esercizio 5. do Carmo, Esercizio 1-5.2

Soluzione. Questo esercizio ha un suggerimento al fondo del libro. Usiamo il suggerimento e svolgiamo i calcoli. Si hanno le formule (ricordate nel suggerimento):

$$\alpha' = \mathbf{t}, \quad \alpha'' = k\mathbf{n}$$

da cui, derivando ancora e usando le formule di Frenet

$$\alpha''' = k\mathbf{n}' + k'\mathbf{n} = -k^2\mathbf{t} + k\tau\mathbf{b} + k'\mathbf{n}$$

Dunque $\alpha' \wedge \alpha'' = k\mathbf{b}$ e moltiplicando scalarmente per α''' si ha

$$(\alpha' \wedge \alpha'') \cdot \alpha''' = k^2\tau$$

e da qui la tesi.

Esercizio 6. do Carmo, Esercizio 1-5.7

Soluzione. Anche in questo caso sul do Carmo c'è un suggerimento. Osserviamo anche che la curva è piana, e quindi la torsione τ è identicamente nulla.
a. Sia $\alpha(s)$ la parametrizzazione per arcolunghezza. Allora la curva β diventa:

$$\beta(s) = \alpha(s) + \frac{1}{k(s)}\mathbf{n}(s)$$

Calcoliamo il vettore tangente a β:

$$\begin{aligned}\beta'(s) &= \alpha'(s) - \frac{k'(s)}{k^2(s)}\mathbf{n} + \frac{1}{k(s)}\mathbf{n}'(s)\\ &= \mathbf{t} - \frac{k'(s)}{k^2(s)}\mathbf{n} + \frac{1}{k(s)}k(s)\mathbf{t}\\ &= -\frac{k'(s)}{k^2(s)}\mathbf{n}\end{aligned}$$

e cioè il vettore tangente a β è normale ad α. Vediamo che proprio le rette coincidono: la retta tangente nel punto $\beta(s)$ è

$$\begin{aligned}r(u) &= \beta(s) - u\,\frac{k'(s)}{k^2(s)}\mathbf{n}\\ &= \alpha(s) + \frac{1}{k(s)}\mathbf{n}(s) - u\,\frac{k'(s)}{k^2(s)}\mathbf{n}\\ &= \alpha(s) + \frac{k(s) - uk'(s)}{k^2(s)}\mathbf{n}\end{aligned}$$

e questa è la retta normale nel punto $\alpha(s)$.
b. Questo punto è svolto completamente sul do Carmo (nello svolgimento si fa tendere s_2 a s_1, mentre nel testo dell'esercizio è il contrario). Come prima, la curva $\alpha(s)$ è parametrizzata per arcolunghezza. In due punti s_1 e s_2 le rette normali sono

$$r_1(u) = \alpha(s_1) + u\,\mathbf{n}(s_1), \qquad r_2(v) = \alpha(s_2) + v\,\mathbf{n}(s_2)$$

Consideriamo s_1 fissato e facciamo variare s_2. L'intersezione si ottiene per valori $u(s_2)$, $v(s_2)$ *che dipendono da* s_2 tali che $r_1(u(s_2)) = r_2(v(s_2))$ e per questi valori si ha:

$$\alpha(s_2) - \alpha(s_1) = u(s_2)\,\mathbf{n}(s_1) - v(s_2)\,\mathbf{n}(s_2);$$

dividendo entrambi i membri per la stessa quantità $(s_2 - s_1)$ si ottiene

$$\frac{\alpha(s_2) - \alpha(s_1)}{s_2 - s_1} = \frac{u(s_2)\,\mathbf{n}(s_1) - v(s_2)\,\mathbf{n}(s_2)}{s_2 - s_1}$$

e passando al limite si trova

$$\alpha'(s_1) = \lim_{s_2 \to s_1} \frac{\alpha(s_2) - \alpha(s_1)}{s_2 - s_1} = \lim_{s_2 \to s_1} \frac{u(s_2)\,\mathbf{n}(s_1) - v(s_2)\,\mathbf{n}(s_2)}{s_2 - s_1}$$

e quindi, moltiplicando scalarmente il primo e l'ultimo termine per $\alpha'(s_1)$ si ha:

$$1 = \lim_{s_2 \to s_1} \left(\alpha'(s_1) \cdot \frac{u(s_2)\,\mathbf{n}(s_1)}{s_2 - s_1} \right) - \lim_{s_2 \to s_1} \left(\alpha'(s_1) \cdot \frac{v(s_2)\,\mathbf{n}(s_2)}{s_2 - s_1} \right)$$

Il primo termine è nullo perché $\alpha'(s_1) = \mathbf{t}(s_1)$ è perpendicolare a $\mathbf{n}(s_1)$. Usando il teorema sul prodotto dei limiti si ha:

$$\begin{aligned}
1 &= -\left(\lim_{s_2 \to s_1} v(s_2) \right) \lim_{s_2 \to s_1} \left(\alpha'(s_1) \cdot \frac{\mathbf{n}(s_2)}{s_2 - s_1} \right) \\
&= -\left(\lim_{s_2 \to s_1} v(s_2) \right) \lim_{s_2 \to s_1} \left(\alpha'(s_1) \cdot \frac{\mathbf{n}(s_2) - \mathbf{n}(s_1)}{s_2 - s_1} \right) \\
&= -\left(\lim_{s_2 \to s_1} v(s_2) \right) \alpha'(s_1) \cdot \lim_{s_2 \to s_1} \left(\frac{\mathbf{n}(s_2) - \mathbf{n}(s_1)}{s_2 - s_1} \right) \\
&= -\left(\lim_{s_2 \to s_1} v(s_2) \right) \alpha'(s_1) \cdot \mathbf{n}'(s_1)
\end{aligned}$$

dove il secondo uguale risulta nuovamente dal fatto che $\alpha'(s_1) = \mathbf{t}(s_1)$ è perpendicolare a $\mathbf{n}(s_1)$ e il terzo uguale dal fatto che $\alpha'(s_1)$ è costante al variare di s_2. Dunque

$$\lim_{s_2 \to s_1} v(s_2) = -\frac{1}{\mathbf{t}(s_1) \cdot \mathbf{n}'(s_1)} = \frac{1}{k(s_1)}$$

dalla seconda formula di Frenet e si ha la tesi: il punto limite è

$$\lim_{s_2 \to s_1} \alpha(s_2) + v(s_2)\,\mathbf{n}(s_2) = \alpha(s_1) + \frac{1}{k(s_1)}\mathbf{n}(s_1)$$

e cioè appartiene all'evoluta (ricordare che $\alpha(s)$ e $\mathbf{n}(s)$ sono continue).

Esercizio 7. do Carmo, Esercizio 1-5.10

Soluzione. Questo esercizio spiega l'importanza della condizione di biregolarità. Se la curvatura si annulla in un punto isolato, potremmo pensare di definire il vettore normale in quel punto come il limite dei vettori normali. Questo esempio mostra una curva per cui la funzione "vettore normale" non ammette limite e quindi non si può estendere la definizione di vettore normale per continuità. È però possibile definire la torsione in modo continuo in questi punti ottenendo una curva non piana la cui torsione è sempre nulla (l'equivalenza fra planarità e torsione nulla è stato dimostrato con l'ipotesi di curva biregolare).
a. La coordinata $x(t) = t$ è evidentemente di classe $\mathcal{C}^\infty$. Il punto dell'esercizio è calcolare le derivate della funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da

$$f(t) = \begin{cases} e^{-1/t^2} & \text{per } t > 0 \\ 0 & \text{per } t \leq 0 \end{cases}$$

Questa è la coordinata $z(t)$. La $y(t)$ ha gli intervalli scambiati e il calcolo è lo stesso. È chiaro che $f(t)$ è di classe $\mathcal{C}^\infty$ per $t \neq 0$. Inoltre, tutte le derivate *sinistre* di $f(t)$ per $t = 0$ sono nulle. Dobbiamo quindi calcolare le derivate destre. Dal fatto che la funzione ha tutte le derivate continue per $t > 0$ (e dal teorema di Lagrange) sappiamo che per avere la derivata destra in $t = 0$ basta dimostrare che per ogni $n \geq 1$

$$\lim_{t \to 0^+} f^{(n)}(t) = 0$$

Lemma 0.1. *Per ogni $n \geq 0$ esiste un polinomio $p_n(T)$ di grado $3n$ tale che, per $t > 0$ si ha*

$$\left(e^{-1/t^2}\right)^{(n)} = e^{-1/t^2} p_n(1/t)$$

Dimostrazione. La formula vale ovviamente per $n = 0$, con $p_0(T) = 1$.

Supponiamo la formula vera per un valore fissato n. Allora

$$\begin{aligned}
\left(e^{-1/t^2}\right)^{(n+1)} &= \left(e^{-1/t^2} p_n(1/t)\right)' \\
&= e^{-1/t^2}(2/t^3)p_n(1/t) - e^{-1/t^2} p_n'(1/t)(1/t^2) \\
&= e^{-1/t^2}\left[(2/t^3)p_n(1/t) - p_n'(1/t)(1/t^2)\right] \\
&= e^{-1/t^2} p_{n+1}(1/t)
\end{aligned}$$

dove $p_{n+1}(T) = 2T^3 p_n(T) - T^2 p_n'(T)$ è un polinomio di grado $3n + 3$. □

Dunque

$$\lim_{t\to 0^+} \left(e^{-1/t^2}\right)^{(n)} = \lim_{T\to+\infty} \frac{p_n(T)}{e^{T^2}} = 0$$

e perciò la curva $\alpha(t)$ è di classe $\mathcal{C}^\infty$ su tutto $\mathbb{R}$.

b. Il vettore tangente è

$$\alpha'(t) = \begin{cases} (1, 0, \frac{2}{t^3} e^{-1/t^2}) & \text{per } t > 0 \\ (1, \frac{2}{t^3} e^{-1/t^2}, 0) & \text{per } t < 0 \\ (1, 0, 0) & \text{per } t = 0 \end{cases}$$

e quindi la curva è regolare. Calcolando la derivata seconda, si ha

$$\alpha''(t) = \begin{cases} (0, 0, -2\frac{3t^2 - 2}{t^6} e^{-1/t^2}) & \text{per } t > 0 \\ (0, -2\frac{3t^2 - 2}{t^6} e^{-1/t^2}, 0) & \text{per } t < 0 \\ (0, 0, 0) & \text{per } t = 0 \end{cases}$$

e quindi la curvatura non è nulla per $t \neq 0$, $t \neq \pm\sqrt{2/3}$. Inoltre è chiaro che la curvatura $k(0) = 0$.

c. Il piano osculatore è generato dal vettore tangente e dal vettore normale, o anche dai vettori α' e α''. Quando sono entrambi non nulli, il piano osculatore è perpendicolare al vettore $\alpha' \wedge \alpha''$. Per valori di t vicini a 0 si ha:

$$\alpha'(t) \wedge \alpha''(t) = \begin{cases} (0, 2\frac{3t^2 - 2}{t^6} e^{-1/t^2}, 0) & \text{per } t > 0 \\ (0, 0, -2\frac{3t^2 - 2}{t^6} e^{-1/t^2}) & \text{per } t < 0 \end{cases}$$

e quindi il piano osculatore è costantemente il piano xz per $t > 0$ e il piano xy per $t < 0$. In particolare, il vettore normale non può essere esteso con continuità per $t = 0$. Notiamo che invece il vettore tangente è continuo (questo è ovvio, la curva è regolare).

d. È chiaro che la curva è contenuta nel piano xz per $t > 0$ e nel piano xy per $t < 0$. Quindi la torsione è identicamente nulla per $t \neq 0$ e può essere estesa con continuità ponendo $\tau(0) = 0$.

Esercizio 8. do Carmo, Esercizio 1-5.13

Soluzione. La soluzione è scritta sul do Carmo. Rivediamo insieme i passaggi, ricordando che la nostra convenzione sulla torsione è all'opposto di quella del do Carmo. L'enunciato non cambia, perché coinvolge solo il quadrato della torsione ma i calcoli sono leggermenti diversi.

necessaria. Possiamo ovviamente supporre che $\alpha(s)$ sia parametrizzata per arcolunghezza. Dall'ipotesi che la curva sia su una sfera e supponendo che il centro della sfera sia l'origine, cosa possibile a meno di una traslazione, si ha che

$$\|\alpha(s)\|^2 = c$$

è costante. Derivando si ottiene

$$2\alpha(s) \cdot \alpha'(s) = 0$$

e cioè $\alpha(s) = A(s)\,\mathbf{n}(s) + B(s)\,\mathbf{b}(s)$ (perché è perpendicolare a $\alpha'(s) = \mathbf{t}(s)$). Derivando e usando le formule di Frenet si ha:

$$\begin{aligned} \mathbf{t} = \alpha' &= A'\mathbf{n} + A\mathbf{n}' + B'\mathbf{b} + B\mathbf{b}' \\ &= A'\mathbf{n} + A(-k\mathbf{t} + \tau\mathbf{b}) + B'\mathbf{b} - \tau B\mathbf{n} \\ &= -kA\mathbf{t} + (A' - \tau B)\mathbf{n} + (A\tau + B')\mathbf{b} \end{aligned}$$

da cui si ottiene $A = -1/k$, $B = -A'/\tau$. Con le notazioni del do Carmo

$$R = 1/k, \qquad T = 1/\tau$$

si ottiene $A = -R$ e $B = -R'T$ (attenzione al segno, se leggete il do Carmo). Dunque

$$\alpha(s) = -R(s)\,\mathbf{n}(s) - R'(s)\,T(s)\,\mathbf{b}(s)$$

ha norma costante e cioè $R^2 + (R'T)^2$ è costante.

sufficiente. Poniamo

$$\beta(s) = \alpha(s) + R(s)\,\mathbf{n}(s) + R'(s)\,T(s)\,\mathbf{b}(s)$$

(di nuovo, attenzione al segno). Da quello che abbiamo visto prima, questo dovrebbe essere costante (è il centro della sfera che stiamo cercando). Non può venire in mente senza suggerimento, oppure senza avere fatto la dimostrazione della necessità.

Per dimostrare che è effettivamente costante, deriviamo usando le formule di Frenet per α:

$$\begin{aligned} \beta' &= \alpha' + R'\,\mathbf{n} + R\mathbf{n}' + (R'T)'\mathbf{b} + R'T\mathbf{b}' \\ &= \mathbf{t} + R'\mathbf{n} + R(-k\mathbf{t} + \tau\mathbf{b}) + (R'T)'\mathbf{b} - R'T\tau\mathbf{n} \\ &= (1 - Rk)\mathbf{t} + (R' - R'T\tau)\mathbf{n} + (R\tau + (R'T)')\mathbf{b} \end{aligned}$$

e ricordando che $R = 1/k$ e $T = 1/\tau$ si ottiene

$$\beta' = (R\tau + (R'T)')\mathbf{b}$$

Usiamo ora l'ipotesi e cioè $R^2 + (R'T)^2$ =costante. Derivando e ricordando che $T = 1/\tau$:

$$0 = 2RR' + 2(R'T)(R'T)' = \frac{2R'}{\tau}\left(R\tau + (R'T)'\right)$$

e poiché $\tau \neq 0$ e $k' \neq 0$ (per ipotesi) deve essere $(R\tau + (R'T)') = 0$ e quindi $\beta'(s) \equiv 0$. Dunque $\beta(s) = p_0$ è costante e allora

$$\|\alpha(s) - p_0\|^2 = R^2 + (R'T)^2$$

è costante e cioè $\alpha(s)$ sta su una sfera di centro p_0.