6 Distribuzioni (funzioni generalizzate)

Di cosa si tratta? Le distribuzioni sono funzionali continui su opportuni spazi di funzioni. Generalizzano il concetto di funzione, nel senso che qualsiasi funzione localmente integrabile (in particolare, continua) può essere identificata con una distribuzione e che molte operazioni standard sulle funzioni si estendono alle distribuzioni. Per questo motivo, le distribuzioni sono anche chiamate *funzioni generalizzate*. Per alcuni aspetti, le distribuzioni si comportano addirittura meglio delle funzioni. Per esempio, qualsiasi distribuzione può essere (parzialmente) derivata tutte le volte che si desidera. Questo rende le distribuzioni un ambiente molto adatto allo studio delle *equazioni alle derivate parziali*.

Nel seguito Ω denota un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^n$ con $n \geqslant 1$.

Scriveremo $K \subset\subset \Omega$ se K è compatto e $K \subset \Omega$.

Ricordiamo che un multi-indice è un vettore $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ con $\alpha_j \in \{0, 1, 2, \dots\}$. Per una funzione $f = f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ di classe $\mathscr{C}^N(\Omega)$ si scrive[1]

$$\partial^\alpha f = \partial_x^\alpha f = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n} f := \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} \qquad (\text{“}\alpha\text{-derivata parziale”}),$$

con $|\alpha| = |\alpha_1| + \ldots + |\alpha_n| \leqslant N$. Si scrive anche, per $x \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ multi-indice, $x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$, dove è sottinteso l'abuso di notazione $x^0 \equiv 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

6.1 Le funzioni test

Il supporto di una funzione continua $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ e l'insieme

$$\boxed{\operatorname{supp} f := \overline{\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \neq 0\}}.}$$

6.1 Esempio. *a*) $f(x) = \max\{1 - x^2, 0\} \Rightarrow \operatorname{supp} f = [-1, 1]$.

b) $f(x) = \sin x \Rightarrow \operatorname{supp} f = \mathbb{R}$.

6.2 Definizione (Spazio delle funzioni test)**.** *Definiamo*

$$\mathscr{D}(\Omega) = \left\{\phi \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \mid \operatorname{supp} \phi \subset\subset \Omega\right\}.$$

$\mathscr{D}(\Omega)$ è uno spazio vettoriale (con la solita addizione di funzioni e la solita moltiplicazione di funzioni per numeri complessi). Infatti,

$$\operatorname{supp}(\phi + \psi) \subseteq \operatorname{supp} \phi \cup \operatorname{supp} \psi, \qquad \operatorname{supp}(\lambda\phi) \subseteq \operatorname{supp} \phi \quad (\lambda \in \mathbb{C}).$$

[1] L'ordine di applicazione delle derivate parziali in $\partial^\alpha f$ non è rilevante, grazie al Teorema di Schwarz, per le ipotesi $f \in \mathscr{C}^N(\Omega)$ e $|\alpha| \leqslant N$.

Si nota che $\mathscr{D}(\Omega) \subseteq \mathscr{D}(\tilde{\Omega}) \subseteq \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ per $\Omega \subseteq \tilde{\Omega}$.

6.3 Esempio (Mollificatore). $\rho(x) := \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{|x|^2-1}\right) & : |x| < 1 \\ 0 & : |x| \geqslant 1. \end{cases}$

Con $c := \int_{\mathbb{R}^n} \rho(x)\,dx$ *sia* $\rho_\varepsilon(x) = \dfrac{\varepsilon^{-n}}{c}\rho\Big(\dfrac{x}{\varepsilon}\Big)$, $\varepsilon > 0$.

$\Rightarrow 0 \leqslant \rho_\varepsilon \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ *con* $\operatorname{supp}\rho = \{x \mid |x| \leqslant \varepsilon\}$ *e* $\int_{\mathbb{R}^n} \rho_\varepsilon(x)\,dx = 1$.

6.4 Lemma. *Sia* $K \subset\subset \Omega$. *Esiste* $\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$ *con* $0 \leqslant \phi \leqslant 1$ *e* $\phi \equiv 1$ *in un intorno di* K.

6.5 Definizione. *In* $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ *definiamo le norme* $\|\cdot\|_j$, $j = 0, 1, 2, \dots$ *da*

$$\|\phi\|_j := \max_{x \in \mathbb{R},\, |\alpha| \leqslant j} |\partial_x^\alpha \phi(x)|.$$

6.6 Definizione. *Una successione* $(\phi_k)_k \subseteq \mathscr{D}(\Omega)$ *si dice convergente a* $\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$ *se*

i) $\exists\, K \subset\subset \Omega \quad \forall\, k : \quad \operatorname{supp}\phi_k \subseteq K$,

ii) $\|\phi_k - \phi\|_j \xrightarrow{k \to +\infty} 0$ *per ogni* $j = 0, 1, 2, \dots$

Scriviamo $\phi_k \xrightarrow{k \to +\infty} \phi$ *oppure* $\lim_{k \to +\infty} \phi_k = \phi$; *si nota che allora anche* $\operatorname{supp}\phi \subseteq K$.

Condizione ii) significa che $\partial^\alpha \phi_k \xrightarrow{k \to +\infty} \partial^\alpha \phi$ uniformemente in $\mathbb{R}^n$ per tutte α.

6.7 Lemma. *Sia* $\beta \in \mathbb{N}_0^n$ *e* $\phi_k \xrightarrow{k \to +\infty} \phi$. *Allora* $\partial^\beta \phi_k \xrightarrow{k \to +\infty} \partial^\beta \phi$.

6.2 Distribuzioni

6.8 Definizione. *Una mappa* $T : \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ *si dice distribuzione in/su* Ω *se*

i) T *è lineare.*

ii) *Per ogni successione* $(\phi_k)_k$ *convergente in* $\mathscr{D}(\Omega)$ *vale* $\lim_{k \to +\infty} T(\phi_k) = T\Big(\lim_{k \to +\infty} \phi_k\Big)$.

Definiamo

$$\mathscr{D}'(\Omega) = \{T : \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{C} \mid T \text{ distribuzioni}\}.$$

Si nota che $\mathscr{D}'(\Omega)$ è uno sottospazio dello spazio vettoriale delle mappe lineari $\mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$.

6.9 Teorema (Disuguaglianza di controllo). *Sia $T : \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ lineare. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

a) $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$

b) $\forall\, K \subset\subset \Omega \quad \exists\, C = C(K) \geqslant 0 \quad \exists\, j = j(K) \in \mathbb{N} \quad \forall_{\substack{\phi\in\mathscr{D}(\Omega),\\ \operatorname{supp}\phi\subseteq K}} : \qquad |T(\phi)| \leqslant C\|\phi\|_j$

6.10 Definizione. *$T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ si chiama distribuzione di ordine finito se nel Teorema 6.9, b) si può scegliere un j simultaneamente per tutti i $K \subset\subset \Omega$. Il j più piccolo possibile è detto ordine di T.*

6.11 Esempio (Distribuzioni regolari). *Sia $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, cioè*

$$\int_K |f(x)|\, dx < +\infty \qquad \forall\, K \subset\subset \Omega;$$

(f si dice localmente integrabile). Allora

$$\boxed{T_f : \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{C}, \quad T_f(\phi) = \int_\Omega f(x)\phi(x)\, dx}$$

è una distribuzione di ordine 0. T_f è detta distribuzione regolare, f è la densità di T_f.

6.12 Teorema. *Sia f localmente integrabile in Ω. Allora*

$$T_f(\phi) = 0 \quad \forall\, \phi \in \mathscr{D}(\Omega) \iff f = 0 \text{ quasi ovunque in } \Omega.$$

In particolare, la densità di una distribuzione regolare è determinata unicamente (quasi ovunque).

6.13 Esempio (Distribuzione δ, distribuzione di Dirac). *Definiamo*

$$\boxed{\delta : \mathscr{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}\colon \phi \mapsto \delta(\phi) = \phi(0).}$$

Allora $\delta \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ di ordine 0 non è una distribuzione regolare.

6.14 Esempio (Valor principale di $1/x$). *$x \mapsto 1/x$ non appartiene a $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, quindi non definisce una distribuzione regolare su $\mathbb{R}$. Comunque*

$$\boxed{T(\phi) = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{\mathbb{R}\setminus[-\varepsilon,\varepsilon]} \frac{\phi(x)}{x}\, dx, \qquad \phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}),}$$

definisce $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$, detta valor principale di $1/x$. Si scrive anche $\text{pv-}\dfrac{1}{x}$ o $\text{vp}\dfrac{1}{x}$.

6.15 Definizione. *Una successione $(T_k)_k \subset \mathscr{D}'(\Omega)$ si dice convergente a $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ se*

$$T_k(\phi) \xrightarrow{k\to+\infty} T(\phi) \qquad \forall\, \phi \in \mathscr{D}(\Omega).$$

6.16 Esempio. $T_{\rho_{1/k}} \xrightarrow{k\to+\infty} \delta$.

6.3 Prodotto di distribuzioni e funzioni di classe $\mathscr{C}^\infty$

Siano $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ e $a \in \mathscr{C}^\infty(\Omega)$. Allora T_f e T_{af} sono distribuzioni regulari e

$$T_{af}(\phi) = \int_\Omega a(x)f(x)\phi(x)\,dx = T_f(a\phi).$$

Si osserva che il secondo membro ha senso per una distribuzione generale T. Ciò suggerisce la definizione successiva.

6.17 Teorema (e Definizione). *Siano $a \in \mathscr{C}^\infty(\Omega)$ e $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$. Allora*

$$(aT)(\phi) = T(a\phi), \qquad \phi \in \mathscr{D}(\Omega),$$

definisce una distribuzione $aT \in \mathscr{D}'(\Omega)$.

6.4 Derivazione di distribuzioni

Sia $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$. Allora $T_f, T_{f'}$ sono distribuzioni regolari. È naturale definire la prima derivata di T_f come $T_{f'}$. Osserviamo

$$\begin{aligned} T_{f'}(\phi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\phi(x)\,dx \\ &= \underbrace{f(x)\phi(x)\Big|_{x=-\infty}^{x=+\infty}}_{=0} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\phi'(x)\,dx = -T_f(\phi') \qquad \forall\, \phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Mentre $T_{f'}(\phi)$ ha senso solo se f è differenziabile, l'espressione $-T_f(\phi')$ ha senso per una qualsiasi funzione f e, di più, possiamo sostituire T_f con una qualsiasi distribuzione T. Questo ci porta a definire $T' \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ con $T'(\phi) = -T(\phi')$.

6.18 Teorema (e definizione). *Sia $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ e $k \in \mathbb{N}$. Allora*

$$T^{(k)}(\phi) := (-1)^k T(\phi^{(k)}) \qquad \forall\, \phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$$

definisce una distribuzione $T^{(k)} = \frac{d^k}{dx^k}T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ (la k-esima derivata di T).

Se $f \in \mathscr{C}^k(\mathbb{R})$, allora $(T_f)^{(k)} = T_{f^{(k)}}$, cioè si ottiene la derivata usuale. Se f e una funzione non necessariamente derivabile, $(T_f)^{(k)}$ si dice k-esima derivata debole oppure k-esima derivata nel senso delle distribuzioni di f. In generale, la derivata debole non è una di-stribuzione regolare.

6.19 Teorema. *Sia f una funzione di forma*

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & : x > x_0 \\ h(x) & : x < x_0 \end{cases}, \qquad g \in \mathscr{C}^1([x_0, +\infty)), \quad h \in \mathscr{C}^1((-\infty, x_0])$$

(come f è definita in x_0 non importa). Allora

$$(T_f)' = T_{f'} + \big(g(x_0) - h(x_0)\big)\delta_{x_0}, \qquad f'(x) := \begin{cases} g'(x) & : x > x_0 \\ h'(x) & : x < x_0 \end{cases}.$$

Si nota che $g(x_0) - h(x_0) = f(x_0+) - f(x_0-)$ è l'altezza del salto di f in x_0.

Il teorema precedente si generalizza a funzioni con più di un salto:

6.20 Esempio. *Sia* $f(x) = |x^2 - 1| = \begin{cases} 1 - x^2 & : -1 < x < 1 \\ x^2 - 1 & : |x| > 1 \end{cases}$. *Derivare T_f:*

Prima derivata: $(T_f)' = T_{f'}, \qquad f'(x) = \begin{cases} -2x & : -1 < x < 1 \\ 2x & : |x| > 1 \end{cases}$

Seconda derivata: $(T_f)'' = (T_{f'})' = T_{f''} + 4\delta_1 + 4\delta_{-1}, \qquad f''(x) = \begin{cases} -2 & : -1 < x < 1 \\ 2 & : |x| > 1 \end{cases}$

Terza derivata: $(T_f)''' = (T_{f''})' + 4\delta_1' - 4\delta_{-1}' = 4\delta_1 - 4\delta_{-1} + 4\delta_1' + 4\delta_{-1}'$

Un operatore a coefficienti costanti di secondo ordine

$$\boxed{P = a\frac{d^2}{dx^2} + b\frac{d}{dx} + c \qquad (a, b, c \in \mathbb{C})}$$

si può pensar come operatore lineare nell'ambito delle distribuzioni:

$$\boxed{P : \mathscr{D}'(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathscr{D}'(\mathbb{R}), \quad PT = aT'' + bT' + cT.}$$

Le soluzioni dell'equazione omogenea $aT'' + bT' + cT = 0$ sono le ben note soluzioni classiche $y \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$, cioè le distribuzioni regolari T_y con $ay''+by'+cy = 0$ (non ci sono soluzioni aggiuntive in $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ – per le equazioni a derivate parziali invece alle soluzioni classiche si aggiungono nuovo soluzioni distribuzionali). Dimostriamo questo fatto per equazioni di primo ordine:

Teorema. Siano $I = (\alpha, \beta)$, $f \in \mathscr{C}(I)$ e $T \in \mathscr{D}'(I)$ con $T' + bT = T_f$. Allora $\exists\, y \in \mathscr{C}^1(I)$ tale che $y'(x) + by(x) = f(x)$ in I e $T = T_y$.

Si dice equazione impulsiva un'equazione non-omogenea del tipo

$$\boxed{aT'' + bT' + cT = S, \quad S \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}),}$$

con S una distribuzione non regolare. Tutte le soluzioni sono della forma $T = T_y + \widehat{T}$, dove y è la generica soluzione dell'omogenea, e $\widehat{T}$ è una soluzione particolare di $PT = S$.

6.21 Definizione. *Ogni soluzione dell'equazione $PT = \delta$ è detta soluzione fondamentale per l'operatore P.*

6.22 Teorema. *Sia P come sopra con $a \neq 0$. Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ e y la soluzione classica dell'equazione $Py = 0$ con $y(x_0) = 0$ e $y'(x_0) = 1/a$. Se*

$$f(x) := \begin{cases} 0 & : x < x_0 \\ y(x) & : x > x_0 \end{cases}$$

allora $PT_f = \delta_{x_0}$. In caxo $x_0 = 0$ si ottiene una soluzione fondamentale per P.

6.23 Esempio. *Cerchiamo una soluzione fondamentale di $Py = y'' - y' - 2y$. Allora $a = b = 1$, $c = -2$ e $x_0 = 0$. Polinomio caratteristico:*

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda + 1)(\lambda - 2).$$

Quindi

$$y'' - y' - 2y = 0 \iff y(x) = Ae^{-x} + Be^{2x}, \quad A, B \in \mathbb{C}.$$

Determinare A e B :

$$\left.\begin{array}{l} y(0) = 0 \iff A + B = 0, \\ y'(0) = 1 \iff -A + 2B = 1 \end{array}\right\} \iff A = -1/3,\ B = 1/3.$$

Risulta la soluzione fondamentale T_f con $f(x) = \begin{cases} 0 & : x < 0 \\ -\frac{1}{3}(e^{-x} - e^{2x}) & : x > 0 \end{cases}.$

6.24 Esempio. *Cerchiamo una soluzione di $Py = y'' - 4y' + 4y = \delta_2$. Allora $a = 1$, $b = -4$, $c = 4$ e $x_0 = 2$. Polinomio caratteristico:*

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2.$$

Quindi

$$y'' - 4y' + 4y = 0 \iff y(x) = Ae^{2x} + Bxe^{2x}, \quad A, B \in \mathbb{C}.$$

Determinare A e B :

$$\left.\begin{array}{l} y(2) = 0 \iff Ae^4 + 2Be^4 = 0, \\ y'(2) = 1 \iff 2Ae^4 + 5Be^4 = 1 \end{array}\right\} \iff A = -2e^{-4},\ B = e^{-4}.$$

Risulta la soluzione $y = T_f$ *con* $f(x) = \begin{cases} 0 & : x < 2 \\ (x-2)e^{2(x-2)} & : x > 2. \end{cases}$

6.5 Distribuzioni ed equazioni a derivate parziali

Sia $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ e α multi-indice. Analogamente alla Definizione 6.18,

$$\boxed{\partial^\alpha T(\phi) = (-1)^{|\alpha|} T(\partial^\alpha \phi) \qquad \forall\, \phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n).}$$

definisce la distribuzione $\partial^\alpha T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$. Quindi un operatore differenziale $P = \sum_{|\alpha|=0}^{m} a_\alpha \partial^\alpha$, con $a_\alpha \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, $|\alpha| \leqslant m$, definisce un'applicazione lineare

$$\boxed{P : \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n) \colon T \mapsto PT = \sum_{|\alpha|=0}^{m} a_\alpha (\partial^\alpha T).}$$

Consideriamo adesso degli operatori a coefficienti costanti, cioè tutti gli a_α sono numeri complessi, $|\alpha| \leqslant m$.

6.25 Esempio. *Con* $m = 2$ *e* $a_\alpha = \begin{cases} 1 & : \alpha \in \{2e_1, \ldots, 2e_n\} \\ 0 & : \textit{altrimenti} \end{cases}$ *risulta*

$$P = \sum_{k=1}^{n} \partial^{2e_k} = \sum_{k=1}^{n} \partial_{x_k}^2 = \partial_{x_1}^2 + \ldots + \partial_{x_n}^2 =: \Delta,$$

il cosidetto operatore di Laplace oppure Laplaciano.

6.26 Definizione. *Le soluzioni dell'equazione* $PT = \delta$ *sono dette soluzioni fondamentali per l'operatore* P.

Se $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ e $\phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, allora

$$(f * \phi)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\phi(x-y)\, dy = T_f(\phi(x - \cdot)), \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Questa relazione ci porta alla seguente definizione della convoluzione:

6.27 Teorema (e Definizione). *Siano* $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ *e* $\phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$.

$$(T * \phi)(x) := T(\phi(x - \cdot)), \qquad x \in \mathbb{R}^n,$$

definisce una funzione $T * \phi \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$. *Per ogni* α *vale* $\partial^\alpha(T * \phi) = (\partial^\alpha T) * \phi = T * (\partial^\alpha \phi)$.

6.28 Esempio. *Vale* $\delta * \phi = \phi$ *perché*

$$(\delta * \phi)(x) = \delta(\phi(x - \cdot)) = \phi(x - 0) = \phi(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Se T è una soluzione fondamentale dell'operatore differenziale a coefficienti costanti P e $u := T * \phi$, si trova

$$Pu = (PT) * \phi = \delta * \phi = \phi$$

(la prima identità vale perché P ha coefficienti costanti). Quindi $T * \phi$ fornisce una soluzione dell'equazione a derivate parziali $Pu = \phi$.

6.29 Teorema (Malgrange-Ehrenpreis)**.** *Ogni operatore differenziale a coefficienti costanti* P *ha una soluzione fondamentale.*

6.30 Teorema. *Il Laplaciano* Δ *in* $\mathbb{R}^2$ *ha soluzione fondamentale* T_f *con* $f(x) = \frac{1}{2\pi} \ln |x|$*. Quindi una soluzione di* $\Delta u = \phi$ *è*

$$u(x) = T_f(\phi_x) = \int_{\mathbb{R}^2} f(y)\phi(x - y)\, dy = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \phi(y) \ln |x - y|\, dy.$$

6.6 Il supporto delle distribuzioni

Siano $S, T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ e $U \subseteq \Omega$ aperto. Si dice

$$\boxed{S = T \text{ in } U :\Longleftrightarrow S(\phi) = T(\phi) \quad \forall\, \phi \in \mathscr{D}(U).}$$

6.31 Lemma. *Sia* $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ *e* $\Omega_T := \bigcup_{\substack{U \subseteq \Omega \text{ aperto,} \\ T = 0 \text{ in } U}} U$*. Allora* $T = 0$ *in* Ω_T*.*
Quindi Ω_T *è il più grande sottoinsieme aperto di* Ω *dove* $T = 0$*.*

6.32 Definizione. *Sia* $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$*. Il supporto di* T *è l'insieme* $\operatorname{supp} T := \Omega \setminus \Omega_T$*.*

6.33 Esempio. $\operatorname{supp} \delta = \{0\}$.

6.34 Esempio. *Sia* $T_f \in \mathscr{D}'(\Omega)$ *una distribuzione regolare. Allora* $\Omega \setminus \operatorname{supp} T_f$ *è il più grande sottoinsieme aperto di* Ω *su quale* $f = 0$ *quasi ovunque.*